**Roll No. ..............................**

# 94106

## B. Sc. Mathematics 6th Semester Examination – May, 2023

### REAL AND COMPLEX ANALYSIS

Paper : 12BSM-361

*Time : Three hours ]* *[ Maximum Marks : 40*

*Before answering the questions, candidates should ensure that they have been supplied the correct and complete question paper. No complaint in this regard, will be entertained after examination.*

*प्रश्नों के उत्तर देने से पहले परीक्षार्थी यह सुनिश्चित कर लें कि उनको पूर्ण एवं सही प्रश्न-पत्र मिला है। परीक्षा के उपरान्त इस संबंध में कोई भी शिकायत नहीं सुनी जायेगी।*

**Note :** Attempt ***five*** questions in all, selecting ***one*** question from each Section. Question No. 9 (Section-V) is ***compulsory***. All questions carry equal marks.

प्रत्येक खण्ड से ***एक*** प्रश्न का चयन करते हुए, कुल ***पाँच*** प्रश्न कीजिए। प्रश्न संख्या 9 (खण्ड-V) ***अनिवार्य*** है। सभी प्रश्नों के समान अंक हैं।

### SECTION – I
### खण्ड – I

1. (a) Find the Jacobian of $u, v, w$ w. r. t. $x, y, z$ given that $u = x + y + z$, $v^3 = yz + zx + xy$, $w^5 = xyz$. 4

$x, y, z$ के सापेक्ष $u, v, w$ का जैकोबियन ज्ञात करें, दिया है कि $u = x + y + z$, $v^3 = yz + zx + xy$, $w^5 = xyz$ ।



(b) Prove that : 4

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1}(1-x)^{n-1}}{(a+x)^{m+n}}dx = \frac{\Gamma m \, \Gamma n}{a^n(1+a)^m \, \Gamma(m+n)}$$

सिद्ध करें कि :

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1}(1-x)^{n-1}}{(a+x)^{m+n}}dx = \frac{\Gamma m \, \Gamma n}{a^n(1+a)^m \, \Gamma(m+n)}$$

2. (a) Show that the volume of the tetrahedron bounded by the planes $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ and $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ is $\frac{abc}{6}$. 4

दिखाइए कि समतलों $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ तथा $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ से परिबद्ध चतुष्फलक का आयतन $\frac{abc}{6}$ है।

(b) Change the order of integration and evaluate : 4

$$\int_0^4 \int_y^4 \frac{x\,dx\,dy}{x^2 + y^2}$$

एकीकरण के क्रम को बदलें और मूल्यांकन करें :

$$\int_0^4 \int_y^4 \frac{x\,dx\,dy}{x^2 + y^2}$$

## SECTION – II
## खण्ड – II

3. (a) Find the Fourier series expansion of $f(x) = x \sin x$ in the interval $[-\pi, \pi]$. 4

अंतराल $[-\pi, \pi]$ में $f(x) = x \sin x$ का फूरियर शृंखला विस्तार ज्ञात करें।

(b) Find the Fourier series expansion for

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{for } -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{for } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 1, & \text{for } \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$ 4

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{के लिए } -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{के लिए } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 1, & \text{के लिए } \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$ के लिए फूरियर शृंखला विस्तार ज्ञात करें।



4. (a) Find the half-range cosine series for $f(x) = x^2$ in the interval $0 \le x \le \pi$. 4

अंतराल $0 \le x \le \pi$ में $f(x) = x^2$ के लिए हाफ रेंज कोसाइन को ज्ञात करें।

(b) Given the series $x = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$, show that $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ using Parseval's identity. 4

शृंखला $x = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$ दिया गया है, पारसेवल की पहचान का उपयोग करके दिखाइए $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$।



## SECTION – III
## खण्ड – III

5. (a) Show that the function $f(z) = |z|^2$ is continuous everywhere but nowhere differentiable except at the origin. 4

दिखाएँ कि फलन $f(z) = |z|^2$ हर जगह सतत है लेकिन मूल बिंदु को छोड़कर कहीं भी अवकलनीय नहीं है।

(b) If $f(z) = u + iv$ is an analytic function and $z = re^{i\theta}$ where $u, v, r, \theta$ are real then the C-R equations are : 4

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}; \quad \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{-1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

यदि $f(z) = u + iv$ एक वैश्लेषिक फलन है और $z = re^{i\theta}$ जहाँ $u, v, r, \theta$ वास्तविक हैं तो C-R समीकरण हैं :

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}; \quad \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{-1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

6. (a) Construct the analytic function of which real part is : 4

$$u(x, y) = e^x(x\cos y - y\sin y)$$

वैश्लेषिक फलन का निर्माण करें जिसका वास्तविक भाग है :

$$u(x, y) = e^x(x\cos y - y\sin y)$$

(b) If $u - v = \dfrac{e^y - \cos x + \sin x}{\cos hy - \cos x}$ and $f(z) = u + iv$ is an analytic function of z, then find $f(z)$ in terms of z such that : 4

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3-i}{2}$$

यदि z का $u - v = \dfrac{e^y - \cos x + \sin x}{\cos hy - \cos x}$ और $f(z) = u + iv$ एक वैश्लेषिक फलन है, तो z के संदर्भ में $f(z)$ ज्ञात करें, जैसा कि :

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3-i}{2}$$

## SECTION – IV

## खण्ड – IV



7. (a) Find the image of the infinite strip $\frac{1}{4} < y < \frac{1}{2}$ under the transformation $w = \frac{1}{z}$. Show the region graphically. 4

रूपांतरण $w = \frac{1}{z}$ के तहत अनंत पट्टी $\frac{1}{4} < y < \frac{1}{2}$ का प्रतिरूप ज्ञात करें। क्षेत्र को ग्राफिक रूप से दिखाएँ।

(b) Prove that every Mobius transformation maps circles or straight lines into circles or straight lines. 4

सिद्ध करें कि प्रत्येक मोबियस रूपांतरण सर्कल या सीधी रेखाओं को सर्कल या सीधी रेखाओं में मैप करता है।



8. (a) Find the image of $|z| < 1$ in the z-plane under the transformation $w(z + i)^2 = 1$. 4

रूपांतरण $w(z + i)^2 = 1$ के तहत z-समतल में $|z| < 1$ का प्रतिरूप ज्ञात करें।

(b) Find the image of the circle $|z - 2| = 2$ under the Mobius transformation, $w = \dfrac{z}{z+1}$

मोबियस रूपांतरण $w = \dfrac{z}{z+1}$ के तहत सर्कल $|z - 2| = 2$ का प्रतिरूप ज्ञात करें।

## SECTION – V

## खण्ड – V

9. (a) If $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$, show that : 2

$$\frac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

यदि $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$, दिखाएँ कि :

$$\frac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

(b) Prove symmetry of Beta Function. 1

बीटा फलन की समरूपता सिद्ध करें।

(c) Find Fourier coefficient $a_0$ for $f(x) = |x|$, $-\pi < x < \pi$. 1

$f(x) = |x|$, $-\pi < x < \pi$ के लिए फूरियर गुणांक $a_0$ ज्ञात कीजिए।

(d) Determine stereographic projection of $z = 1 - i$ on the sphere of radius $\frac{1}{2}$ and centre $\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$. 2

त्रिज्या $\frac{1}{2}$ और केंद्र $\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$ के स्फियर पर $z = 1 - i$ के स्टीरियोग्राफिक प्रक्षेपण का निर्धारण करें।

(e) For what values of $z$, the function $z = \sin hu + \cos v + i \cos hu \sin v$ ceases to be analytic ? 1

$z$ के किस मान के लिए फलन $z = \sin hu + \cos v + i \cos hu \sin v$ विश्लेषिक नहीं रहेगा ?

(f) Define Mobius transformation. 1

मोबियस रूपांतरण को परिभाषित करें।